Heine's Transformation (1847)

Suppose $|q|<1$, $|t|<1$ & $|b|<1$, $b\neq 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n\,t^n}{(c)_n\,(q)_n} = \frac{(b)_\infty (at)_\infty}{(c)_\infty (t)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{b})_n\,(t)_n}{(at)_n\,(q)_n}\, b^n$$

Proof

$$(cq^n)_\infty = (1-cq^n)(1-cq^{n+1})(1-cq^{n+2})\cdots$$

$$(c)_n = (1-c)(1-cq)\cdots(1-cq^{n-1}).$$

Hence

$$(c)_n (cq^n)_\infty = (c)_\infty \quad \&$$

$$(c)_n = \frac{(c)_\infty}{(cq^n)_\infty}, \qquad (cq^n)_\infty = \frac{(c)_\infty}{(c)_n}$$

Hence

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(c)_n (q)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{(b)_\infty}{(bq^n)_\infty} \cdot \frac{(cq^n)_\infty}{(c)_\infty} \cdot \frac{1}{(q)_n}\, t^n$$

$$= \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (cq^n)_\infty}{(bq^n)_\infty (q)_n}\, t^n$$

$$\boxed{\frac{(at)_\infty}{(t)_\infty} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m t^m}{(q)_m}}$$

$$= \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{(q)_n} \frac{(cq^n)_\infty}{(bq^n)_\infty}$$

$$= \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{(q)_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b)_m (bq^n)^m}{(q)_m}$$

$$= \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n (c/b)_m}{(q)_n\,(q)_m}\, b^m q^{mn}$$