Application (1) Let $b=a$, $d=c=e=-1$.

$$ {}_6\psi_6 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-aq^{2n}}{1-a}\right) \frac{(a)_n}{(q)_n} \frac{(-1)_n}{(-aq)_n} \frac{(-1)_n}{(-aq)_n} \frac{(-1)_n}{(-aq)_n} \left(\frac{-qa}{c^2}\right)^n $$

$$ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\frac{1}{a}q^{2n})}{(1-1/a)} \frac{(1)_n}{(q/a)_n} \frac{(qc/a)_n}{(q/c)_n} \frac{(qc/a)_n}{(q/c)_n} \frac{(-1/a)_n}{(-q)_n} \left(\frac{-qa}{c^2}\right)^n $$

$$ \frac{(a)_n}{(1-a)(q)_n} = \frac{(1-a)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-a)\cdots(1-q^n)} = \frac{1}{1-q^n} \quad \text{for } n \geq 1 $$

Hence

$$ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-aq^{2n})}{(1-q^n)} \frac{(-1)_n^3}{(-aq)_n^3} (-aq)^n $$

$$ = \cancel{\frac{(aq)_\infty^2 (q)_\infty (q/a)_\infty}{(-aq)_\infty^4 (-q)_\infty^4 (qa^2)_\infty}} \; \frac{(aq)_\infty (-q)_\infty^3 (aq)_\infty^3 (q)_\infty (\frac{q}{a})_\infty}{(q)_\infty (-aq)_\infty^3 (\frac{q}{a})_\infty (-q)_\infty^3 (-qa)_\infty} $$

Let $a \to 1$ we obtain

$$ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+q^n) \frac{(-1)_n^3}{(-q)_n^3} (-q^n) = \left(\frac{(q)_\infty}{(-q)_\infty}\right)^4 $$

$$ 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{(1+q^n)^2} = \left(\frac{(q)_\infty}{(-q)_\infty}\right)^4 $$